Cálculo Diferencial e Integral II
2012/13 — 1º semestre

1º Teste — LEIC-TP, LEGI, LERC, LEE

10 de Novembro de 2012

1 Enunciado

Justifique adequadamente todas as respostas.

1. Calcule[1]

$$\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$$

em que $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le y \le x, 0 \le z \le -(x-1)^3\}$.

2. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Determine as derivadas parciais de g e em que pontos é que g é diferenciável.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere uma função φ definida por $\varphi(x,y) = f(xy, x^2y^2)$.

   a) Justifique que φ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e relacione as derivadas parciais de f e φ.

   b) Mostre que a derivada dirigida $D_{(-x,y)}\varphi(x,y)$ é identicamente nula.

4. Mostre que a igualdade $\cos x + x + y^2 + \operatorname{sen} y = 1$ define y como uma função γ de classe C^1 de x numa vizinhança de 0 satisfazendo $\gamma(0) = 0$ e que tal função **não** tem um extremo local em 0.

5. Mostre que a função definida por $1 + x^2 + (y-1)^2 + x^3 + (y-1)^4$ possui um extremo local em $(0,1)$ e classifique-o.

6. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{se } x \neq y, \\ x^3, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

   a) Determine em que pontos é que h é contínua.

   b) Mostre que h é integrável em $[0,1]^2$.

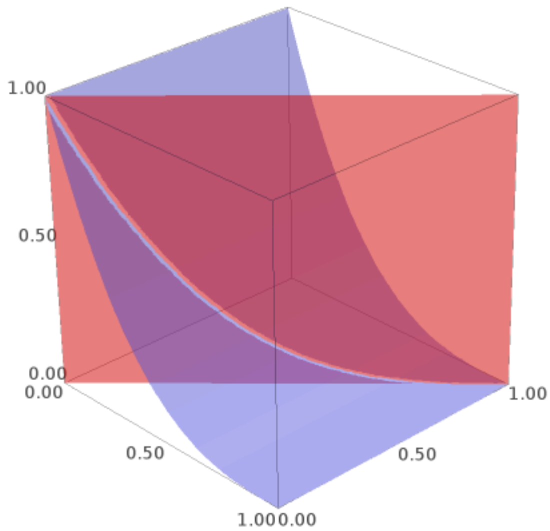
   c) Calcule $\iint_{[0,1]^2} xy\,dx\,dy$ e justifique que o valor do integral é o mesmo de $\iint_{[0,1]^2} h\,dx\,dy$.

[1] Infelizmente o enunciado desta questão saiu com um erro que não foi detectado antes ou durante a prova. A condição $0 \le y \le x$ apareceu como $0 \le x \le y$ o que torna a região de integração ilimitada e o integral não existente. A correcção é feita atribuindo cotação compensatória. O enunciado aqui apresentado foi corrigido apresentando-se uma solução que tem interesse para estudo.

2 Esboço de resolução

Notas adicionais sobre as questões apresentam-se entre [ ]. Se houver solicitações para tal as respostas muito sintéticas apresentadas a seguir serão tornadas mais detalhadas.

1. [Faz-se notar que a notação $\iiint \dots dx\,dy\,dz$ é simplesmente uma notação sobre integrais triplos e não faz qualquer restrição sobre a ordem de integração a usar no cálculo.]



[Pode reproduzir o gráfico acima com Sage com os seguintes comandos:

```
x, y, z = var('x, y, z')
implicit_plot3d(z+(x-1)^3, (x,0, 1), (y,0, 1), (z,0, 1), opacity=0.5)+ \
implicit_plot3d(x-y, (x,0, 1), (y,0, 1), (z,0, 1),color='red', opacity=0.5)
```

]

$$
\begin{aligned}
\iiint_V x\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_y^1 \left(\int_0^{-(x-1)^3} x\,dz \right) dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_y^1 -x(x-1)^3\,dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_y^1 -x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x\,dx \right) dy \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{5} + \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{y^5}{5} - \frac{3y^4}{4} + y^3 - \frac{y^2}{2}\,dy \\
&= \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{3}{20} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

[*O enunciado apresentado no dia da prova estava errado com as variáveis x e y trocadas na condição $0 \le y \le x$ o que tornava a região de integração ilimitada e portanto tendo como* *resposta totalmente correcta "o integral não existe". A pergunta foi corrigida tomando este facto em consideração (cálculos em regiões limitadas com a adição de uma condição adicional podem ser considerados integralmente correctos) e a classificação calculada considerando o máximo entre as classificações obtidas considerando as seis perguntas ou distribuindo a cotação da pergunta 1 entre as perguntas 2 a 6.*]

2. As derivadas parciais de g em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ são dadas por

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{yz(x^2+y^2+z^2)^{1/2} - x^2yz(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{(x^2+y^2+z^2)}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{xz(x^2+y^2+z^2)^{1/2} - xy^2z(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{(x^2+y^2+z^2)}$$
$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{xy(x^2+y^2+z^2)^{1/2} - xyz^2(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{(x^2+y^2+z^2)}$$

Dado que se trata de funções contínuas a função é de classe $C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ logo é diferenciável neste conjunto.

Dado que a função é nula sobre os eixos coordenados as derivadas parciais de g são nulas em $(0,0,0)$. Assim a diferenciabilidade em $(0,0,0)$ equivale a

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{g(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

De facto, majorando $|x|$, $|y|$ e $|z|$ por $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ obtém-se

$$\left| \frac{g(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right| = \left| \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)} \right| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

o que permite usar a definição de limite para provar que o limite é 0.

3. a) Usando o teorema de derivação da função composta

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = yD_1f(xy, x^2y^2) + 2xy^2D_2f(xy, x^2y^2)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = xD_1f(xy, x^2y^2) + 2x^2yD_2f(xy, x^2y^2)$$

   b) Como φ é diferenciável vale para a derivada dirigida

$$D_{(-x,y)}\varphi = (-x, y) \cdot \nabla\varphi$$

   e o resultado segue dos cálculos da alínea anterior.

4. Designemos o primeiro membro da igualdade por $F(x,y)$. F é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. A igualdade é satisfeita em $(0,0)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \cos y$$

donde

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$$

pelo que o teorema da função implícita é aplicável. A afirmação sobre não existência de extremo decorre de

$$\gamma'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = -\frac{1}{1} = -1 \neq 0.$$

5. Da definição da função segue imediatamente que o termo de primeira ordem da fórmula de Taylor relativo a $(0,1)$ é nulo e que o termo de segunda ordem é a forma quadrática definida positiva

$$(x, y-1) \mapsto x^2 + (y-1)^2$$

pelo que $(0,1)$ é um ponto de mínimo local.

6. a) Nos pontos do complementar da recta $x = y$ é possível determinar uma bola centrada no ponto aonde a função coincide com o polinómio xy e daí podemos concluir que a função é contínua nesse ponto.

   Como

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\lambda,\lambda)\\ x\neq y}} xy = \lambda^2$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(\lambda,\lambda)\\ x=y}} xy = \lambda^3$$

   podemos concluir que h não é contínua nos pontos da recta $x = y$ excepto em $(0,0)$ e em $(1,1)$. Nestes dois pontos a função é contínua.

   b) Como o conjunto de pontos de descontinuidade da função está contido no segmento de recta unindo $(0,0)$ a $(1,1)$ e este conjunto tem medida nula podemos concluir que h é integrável pelo critério de Lebesgue de integrabilidade.

   c) Dada uma qualquer partição de $[0,1]^2$ as somas superiores e inferiores das duas funções só diferem nos intervalos que contém pontos do segmento de recta unindo $(0,0)$ a $(1,1)$. Isto permite estabelecer a igualdade dos integrais superior e inferior das duas funções e consequentemente do integral.