TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II — 2º teste, 7/1/2013

2012/13, 1º semestre — ERC, EIC(TP), EGI, EE

---

1 Enunciado

1. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ a região limitada pelas parábolas $y = 4x^2$, $x = y^2$ e pela recta $y = x$. Use a mudança de coordenadas definida por
$$\begin{cases} u = y/x^2, \\ v = x/y^2. \end{cases}$$
para calcular o integral
$$\iint_A \frac{\log(xy)}{x^2y^2}\, dx\, dy.$$

2. Calcule
$$\iiint_B x\, dx\, dy\, dz$$
em que $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2},\ x \ge y \ge 0\}$.
Sugestão: Use uma mudança de variáveis conveniente.

3. Considere um fio modelado por uma linha L definida por um caminho $r(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, com $t \in [0, 2\pi]$, com massa específica $D(x, y, z) = 2 + xy$ em unidades convenientes. Calcule a massa do fio.

4. Considere o campo $G : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ definido por
$$G(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}}(x, 2y, 4z).$$
Calcule o integral de linha
$$\int_L G \cdot d\alpha$$
em que α é um caminho C^1 definindo uma linha L unindo $(1, 0, 0)$ a $(0, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

5. Calcule a área da superfície $S = \left\{(x, y, z) :\in \mathbb{R}^3 : z = xy, x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

6. Calcule
$$\iint_T \operatorname{rot} H \cdot \nu dS,$$
isto é, o fluxo do rotacional do campo H através de uma superfície T e de acordo com uma normal unitária contínua ν a T, em que H está definido em $\mathbb{R}^3$ por
$$H(x, y, z) = (xe^{yz}, ye^{xz}, ze^{xy}),$$
T é descrita por
$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$$
e $\nu(x, y, z) \cdot (0, 0, 1) > 0$ num ponto $(x, y, z) \in T$ se e só se $z > 0$.

2 Esboço de solução

1.

2. Usando coordenadas esféricas
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$
com $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ podemos que a região pode ser descrita por $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \pi/4]$, $\theta \in [0, \pi/4]$ e daí que o integral é calculável via
$$\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^1 \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/4}\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

3. Para calcularmos a massa do fio consideramos o integral em ordem ao comprimento de arco
$$\int_L D\,ds = \int_0^{2\pi} D(r(t))\,\|r'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi}(2 + t\cos t)\sqrt{2}\,dt = 4\pi\sqrt{2}.$$

4. Obviamente que a pergunta só fará sentido se o integral de linha for independente do caminho, isto é, se $G = \nabla\phi$ para um potencial escalar ϕ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Em particular devemos ter
$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}} = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$
Daí que
$$\phi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2} + c(y, z)$$
para alguma função c. Por inspecção das duas outras coordenadas de G verificamos que podemos simplesmente considerar
$$\phi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}$$
o que, pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, permite concluir que
$$\int_L G \cdot d\alpha = \phi(0, 0, 1) - \phi(1, 0, 0) = 1.$$

5. A superfície é descrita explicitamente por uma função $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} = B_1(0, 0) \ni (x, y) \mapsto xy$. Designemos esta função por h. Sabemos então que a área da superfície é dada por
$$\begin{aligned} \iint_{B_1(0,0)} \sqrt{1 + |\nabla h|^2}\,dx\,dy &= \iint_{B_1(0,0)} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\,r\,dr\right)d\theta \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2}\right]\Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\pi(2^{3/2} - 1) \end{aligned}$$
em que se utilizou uma mudança de variáveis para coordenadas polares.

6. Provavelmente o processo mais simples para efectuar o cálculo é utilizar o teorema de Stokes já que T é uma "superfície regular" que é lícito aplicar este teorema. O "bordo" de T é formado por duas circunferências que designaremos por C_1 e C_2 definidas analiticamente por

$$\begin{cases} (y-2)^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (x-2)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

percorridas em sentidos adequados (de acordo com a "regra da mão direita"). Ignorando temporariamente o sentido em que são percorridas podemos considerar para C_1 e C_2 as parametrizações

$$\alpha(t) = \begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = 2 + \cos t, \\ z(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

e

$$\beta(t) = \begin{cases} y(t) = 0, \\ x(t) = 2 + \cos t, \\ z(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

com $t \in [0, 2\pi]$ em ambos os casos.

Somos então conduzidos a

$$\int_{C_1} H \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} H(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (0, 2 + \cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (0, -\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt = 0$$

e similarmente para o integral sobre C_2. Daí o teorema de Stokes garantir que o fluxo do rotacional de H através de T é 0.