Cálculo Diferencial e Integral II — 2º teste modelo

2012/13, 1º semestre — ERC, EIC, EGI, EE

---

1. Seja
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 - y^2 \geq \frac{1}{4},\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$
Use a mudança de coordenadas definida por
$$\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = x^2 - y^2. \end{cases}$$
para calcular o integral
$$\iint_A xy \log(x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

2. Calcule
$$\iiint_B z\, dx\, dy\, dz$$
em que $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z^2 \leq x^2 + y^2\}$.
Sugestão: Use uma mudança de variáveis conveniente.

3. Justifique que uma linha L definida por um caminho $r(t) = (t, \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$, com $t \in [0, 2\pi]$, é rectificável com um comprimento inferior a $2\sqrt{5}\pi$.

4. Considere o campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por
$$F(x, y) = \left(\frac{x - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + y}{x^2 + y^2}\right)$$
e a linha L definida por um caminho r seccionalmente C^1 correspondente a percorrer a fronteira de um triângulo de vértices $(0, 1/2)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ uma vez no sentido directo. Calcule o integral de linha
$$\oint_L F \cdot dr.$$

5. Calcule o integral de superfície
$$\iint_S x\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dS$$
em que $S = \left\{(x, y, z) :\in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$.

6. Calcule
$$\iint_T \operatorname{rot} H \cdot \nu dS,$$
isto é, o fluxo do rotacional do campo H através de uma superfície T e de acordo com uma normal unitária contínua ν a T, em que H está definido em $\mathbb{R}^3$ por
$$H(x, y, z) = (x, y, z \cos(xy)),$$
T é descrita por
$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \in [1, 2]\right\}$$
e $z \cdot \nu(x, y, z) < 0$ em T.

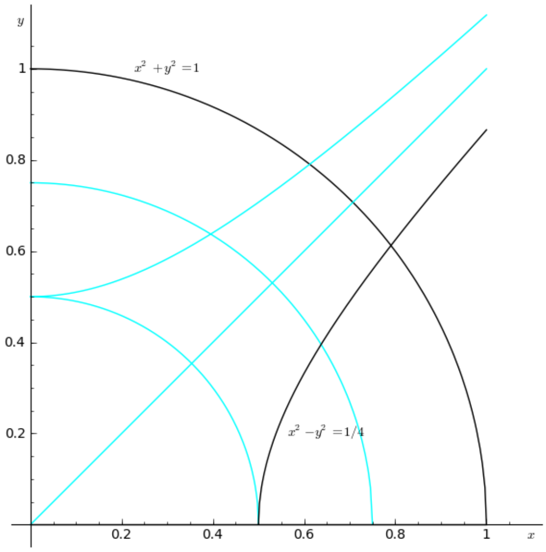
1 Esboço de resolução

1. A aplicação $\varphi : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ é uma bijecção de classe C^1 com matriz jacobiana

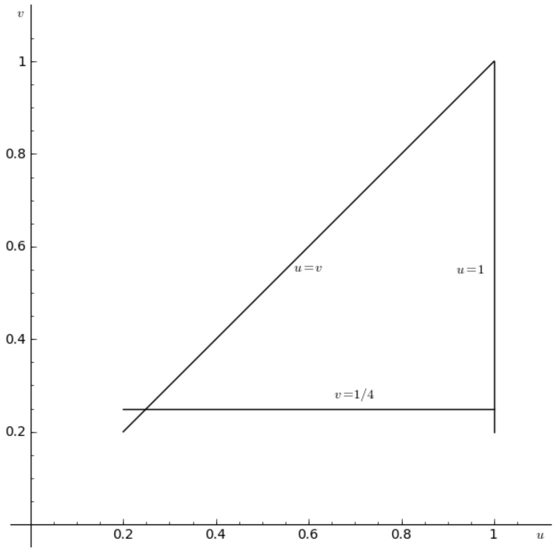
$$J_\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$$

cujo módulo do determinante é $8xy$.

φ é uma bijecção como facilmente se depreende de se considerar as linhas de nível de cada uma das suas funções coordenadas que correspondem a arcos de círculo $x^2+y^2 = u$ $(u > 0)$ e a ramos de hipérbolde $x^2 - y^2 = v$.



A região A é limitada no 1º quadrante pelo arco da circunferência $x^2+y^2 = 1$, pelo ramo de hipérbole $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$, e pelo eixo dos xxs que correspondem no plano uv a $u = 1$, $v = \frac{1}{4}$ e $u = v$ limitando um triângulo T.



A fórmula de mudança de coordenadas conduz então a

$$\begin{aligned}\iint_T \frac{\log v}{8}\,du\,dv &= \int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\int_v^1 \frac{\log v}{8}\,du\right)dv = \frac{1}{8}\int_{\frac{1}{4}}^{1}(1-v)\log v\,dv\\ &= [v\log v]\big|_{1/4}^{1} - \int_{1/4}^{1} 1\,dv - \left[\frac{v^2}{2}\log v\right]\Bigg|_{1/4}^{1} + \int_{1/4}^{1}\frac{v}{2}\,dv\\ &= \frac{7}{32}\log 4 - \frac{33}{64}\end{aligned}$$

2. Uma possível mudança de coordenadas são coordenadas esféricas definidas por

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi,\\ y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\rho \geq 0$. Com esta mudança de coordenadas este conjunto é descrito por $\rho \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Então o integral é calculável considerando

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\rho^3\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta = 2\pi\frac{3}{16}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\varphi)\,d\varphi = 0$$

3. A parametrização é de classe C^1 e injectiva num intervalo limitado e fechado logo a linha é rectificável com o seu comprimentos dado por

$$\int_0^{2\pi}\|r'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2+3\cos^2 t}\,dt \leq \int_0^{2\pi}\sqrt{5}\,dt = 2\pi\sqrt{5}.$$

4. O campo F é fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pois

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) &= \frac{x^2+y^2-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right) &= \frac{-(x^2+y^2)-2y(x-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

A linha fechada descrita limita uma região do plano contida no semiplano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ que é um conjunto em estrela onde F é fechado. Logo aí F é conservativo e

$$\oint_L F\cdot dr = 0.$$

5. A superfície S corresponde ao gráfico da função

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\, x\geq 0, y\geq 0\} \mapsto x^2 - y^2$$

logo o elemento de volume bidimensional usando coordenadas cartesianas é $\sqrt{1+4x^2+4y^2}$ e

$$\iint_S x\sqrt{1+4x^2+4y^2}dS = \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1,\, x\geq 0, y\geq 0\}} x(1+4x^2+4y^2)\,dx\,dy$$

Para calcular o integral duplo do segundo membro uma escolha natural é considerar coordenadas polares que conduzem a

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 r\cos\theta(1+4r^2)r\,dr\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^1 r^2(1+4r^2)\,dr = \frac{1}{3}+\frac{4}{5}.$$

6. Usando o teorema de Stokes o integral é igual à soma de dois integrais de linha (em sentidos adquados) do campo H sobre as circunferências definidas por

$$\begin{cases} z = 1, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} z = 2, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases}$$

Acontece que o campo H sobre estas circunferências é ortogonal às respectivas tangentes e consequentemente os dois integrais de linha são nula e o mesmo acontecerá ao integral que se pretendia calcular.