

Cálculo Diferencial e Integral II

Repetição dos Testes e Exame (Versão A)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

29 de Junho de 2015

Para resolver um teste considere a secção respectiva. Para resolver o exame considere todas as perguntas. Justifique adequadamente todas as respostas.

1º Teste

(3) I 1. Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z \leq 1, y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Exprima o volume de V como um integral triplo iterado e calcule-o.

(4) 2. Considere uma função definida num subconjunto D de \mathbb{R}^2 por

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{e^{xy} - 1}}$$

a) Determine o domínio D de g .

b) Determine $\text{int } D$, ∂D e \overline{D} e decida se D é aberto, fechado, conexo ou limitado.

c) Decida se g é ou não prolongável por continuidade a $(0, 0)$.

d) Decida se g é ou não uma função limitada.

(4) 3. Considere funções $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com $H \in C^2(\mathbb{R}^2)$, e $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x, y, z) = H(x^2 - z^2, y^2 - z^2).$$

Calcule $\frac{\partial \psi}{\partial y}(0, 0, 1)$ e $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(0, 0, 1)$ em termos de derivadas parciais convenientes de H .

(3) 4. Decida se a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 5x^2 + 4xy + y^2 - \cos(xy)$ tem ou não um ponto de extremo local em $(0, 0)$ e, se optar pela afirmativa, classifique-o.

(3) 5. Considere a uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{xy} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Decida se f é ou não diferenciável em $(0, 0)$.

b) Determine o contradomínio de f .

(3) 6. Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ e com valores positivos. Considere uma função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \int_0^1 \text{sen}(tx^2)h(t) dt.$$

Mostre que $G'(0) = 0$ e $G''(0) > 0$.

2º Teste

- (4) 7. Justifique que a equação $2u + v + e^{uv} = 2$ define implicitamente u como uma função $h(v)$ numa vizinhança de $(u, v) = (0, 1)$ e calcule $h'(1)$.
- (4) 8. Calcule o volume de $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$.
- (4) 9. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \leq y \leq 2(x + 1), -(x - 1) \leq y \leq -2(x - 1)\}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Aplique a mudança de variável

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x-1} \\ v = \frac{y}{x+1} \end{cases}$$

para transformar o integral

$$\iint_A \frac{y}{(x^2 - 1)^2} f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx dy$$

num integral de uma função adequada num intervalo de \mathbb{R}^2 .

- (3) 10. Calcule o integral de linha $\int_L G \cdot dr$ em que L é descrita por um caminho C^1 unindo $(0, 0, 0)$ ao um ponto $(1, 1, 1)$ e $G(x, y, z) = (z, 2y + z, y + x)$.
- (3) 11. Seja $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 1\}$.
- a) Mostre que M é uma variedade diferenciável e indique a sua dimensão.
- b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a M no ponto $(5, 1, 4, 3)$.
- (2) 12. Calcule

$$\iint_D \text{rot } F \cdot \nu dS$$

em que

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 1/2, x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

ν é a normal unitária contínua sobre D verificando $\nu(0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) < 0$ e

$$F(x, y, z) = (-y, x, e^{xyz}).$$