TÉCNICO LISBOA

# Cálculo Diferencial e Integral II
# Repetição dos Testes e Exame (Versão B)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

29 de Junho de 2015

*Para resolver um teste considere a secção respectiva. Para resolver o exame considere todas as perguntas. Justifique adequadamente todas as respostas.*

## 1º Teste

(3) I 1. Seja $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+z \leq 1,\ x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$. Exprima o volume de $V$ como um integral triplo iterado e calcule-o.

(4) 2. Considere uma função definida num subconjunto $D$ de $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{xy}}}$$

a) Determine o domínio $D$ de $g$.

b) Determine $\operatorname{int} D$, $\partial D$ e $\overline{D}$ e decida se $D$ é aberto, fechado, conexo ou limitado.

c) Decida se $g$ é ou não prolongável por continuidade a $(0,0)$.

d) Decida se $g$ é ou não uma função limitada.

(4) 3. Considere funções $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $H \in C^2(\mathbb{R}^2)$, e $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x,y,z) = H(x^2-y^2, y^2-z^2).$$

Calcule $\frac{\partial \psi}{\partial y}(0,1,0)$ e $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(0,1,0)$ em termos de derivadas parciais convenientes de $H$.

(3) 4. Decida se a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = \cos(xy) + x^2 + 4xy + 5y^2$ tem ou não um ponto de extremo local em $(0,0)$ e, se optar pela afirmativa, classifique-o.

(3) 5. Considere a uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{xy}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Decida se $f$ é ou não diferenciável em $(0,0)$.

b) Determine o contradomínio de $f$.

(3) 6. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $C^\infty$ e com valores positivos. Considere uma função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \int_0^1 \operatorname{sen}(tx^2)h(t)\,dt.$$

Mostre que $G'(0) = 0$ e $G''(0) > 0$.

## 2º Teste

(4) 7. Justifique que a equação $u + 2v + e^{uv} = 2$ define implicitamente $v$ como uma função $h(u)$ numa vizinhança de $(u, v) = (1, 0)$ e calcule $h'(1)$.

(4) 8. Calcule o volume de $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

(4) 9. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \leq y \leq 2(x + 1), -(x - 1) \leq y \leq -2(x - 1)\}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Aplique a mudança de variável

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x-1} \\ v = \frac{y}{x+1} \end{cases}$$

para transformar o integral

$$\iint_A \frac{y}{(x^2 - 1)^2} \, f\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) dx\, dy$$

num integral de uma função adequada num intervalo de $\mathbb{R}^2$.

(3) 10. Calcule o integral de linha $\int_L G \cdot dr$ em que $L$ é descrita por um caminho $C^1$ unindo $(0, 0, 0)$ ao um ponto $(1, 1, 1)$ e $G(x, y, z) = (2x + y, x + z, y)$.

(3) 11. Seja $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 1\}$.

a) Mostre que $M$ é uma variedade diferenciável e indique a sua dimensão.

b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a $M$ no ponto $(5, 1, 3, 4)$.

(2) 12. Calcule

$$\iint_D \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$$

em que

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 1/2, x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$\nu$ é a normal unitária contínua sobre $D$ verificando $\nu(0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) > 0$ e

$$F(x, y, z) = (-y, x, e^{xyz}).$$