Cálculo Diferencial e Integral II
1º Teste (Versão B)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

11 de Abril de 2015

Justifique adequadamente todas as respostas.

(5,0) 1. Seja $V = \{(x,y,z) \in [0,1]\times[-1,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le y^2,\ 0 \le x \le y^2 \le 1\}$ e $h : [0,1]\times[-1,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

a) Exprima o integral $\iiint_V h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ como um integral integrado triplo ou soma de integrais iterados triplos por uma ordem de integração à sua escolha.

b) Determine o valor de $\iiint_V y\,dx\,dy\,dz$.

(4,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto B de $\mathbb{R}^3$ por

$$g(x,y,z) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

a) Determine o domínio B de g.

b) Determine $\operatorname{int} B$, ∂B e $\overline{B}$ e decida se B é aberto, fechado, conexo ou limitado.

c) Decida se g é ou não prolongável por continuidade a[1] $(1,1,0)$.

d) Decida se g é ou não uma função limitada.

(4,0) 3. Considere funções $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $G \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = G(x+y^2, x^2+y)$.

a) Relacione $\nabla F(-1,-1)$ e $\nabla G(0,0)$ e aproveite para mostrar que $\nabla F(-1,-1) \ne (0,0)$ se e só se $\nabla G(0,0) \ne (0,0)$.

b) Exprima $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(-1,-1)$ em termos de derivadas parciais de G adequadas.

(3,0) 4. Decida se a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = e^{(x+1)^2+(y-1)^2} + (x+1)(y-1) + (x+1)^3$ tem ou não um ponto de extremo local em $(-1,1)$.

(4,0) 5. Considere a uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \operatorname{sen}^2 x}{9x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Decida se f é ou não diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

b) Justifique que o contradomínio da restrição de f a uma qualquer bola fechada centrada em $(0,0)$ é um intervalo da forma $[0,\alpha]$ com $\alpha \in\,]0,1]$.

[1] Corrigido em relação ao enunciado original.