TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
1º Teste (Versão C)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

24 de Abril de 2021

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4,0) 1. a) Calcule a massa de um sólido de densidade $1+z$ ocupando a região

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq (1-y)^2, 0 \leq y \leq 1-|x|\}.$$

b) Justifique que se pode inverter a ordem de integração para calcular

$$\int_1^2 \left(\int_x^2 \frac{e^{x/t}}{t^3}\, dt \right) dx$$

e obtenha o valor do integral.

(2,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \frac{\log(1-x^2y^2)}{\sqrt{xy}}$$

a) Determine o domínio D de f.

b) Determine $\operatorname{int} D$, ∂D e $\overline{D}$ e decida se D é aberto, fechado, conexo ou limitado.

(4,0) 3. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } |x| \geq y^2, \\ \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } |x| < y^2. \end{cases}$$

a) Decida em que pontos é que h é contínua.

b) Decida se h é prolongável por continuidade a $(0,0)$.

(4,0) 4. Considere funções $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e G definida por

$$G(x,y) = F(xy, \log x \log y).$$

Calcule, em termos de derivadas parciais adequadas de F:

a) $\nabla G(1,1)$.

b) $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(1,1)$.

(4,0) 5. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = \frac{2}{1+x^2} + x^2 + xy - y^2 + x^2y^2$.
Decida se $(0,0)$ é um ponto de máximo local, um ponto de mínimo local, ou um ponto de sela de g.

(2,0) 6. Mostre que, dada uma função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua e que toma tanto valores positivos como valores negativos, existem $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$ tais que

$$\int_{B_r(0,0)} \varphi(u+x, v+y)\, du\, dv = 0.$$