TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
2º Teste (Versão A)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

8 de Junho de 2015

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4) 1. Justifique que a equação $x + y^2 + z^2 + e^{xyz} = 2$ define implicitamente z como uma função $h(x,y)$ numa vizinhança de $(x,y,z) = (0,0,1)$ e calcule $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)$.

(4) 2. Calcule o volume de $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, \frac{1}{2} \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

(4) 3. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy^2 \leq 8, 1 \leq x^2 y \leq 8\}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Aplique a mudança de variável

$$\begin{cases} u = xy^2 \\ v = x^2 y \end{cases}$$

para transformar o integral $\iint_A x^2y^2 f(x^3y^3)\, dx\, dy$ num integral de uma função adequada num intervalo de $\mathbb{R}^2$.

(3) 4. Calcule o integral de linha $\int_L ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy$ em que L é descrita por um caminho C^1 unindo a origem a um ponto (a,b) verificando $ab = 1$.

(3) 5. Sejam $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2-1)(x^2+z^2-1) = 0\}$ e $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-1 = 0, x^2+z^2-1 = 0\}$.

a) Justifique que $M \setminus E$ é uma variedade bidimensional.

b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a $M \setminus E$ no ponto $(1,0,1)$.

(2) 6. Calcule

$$\iint_{\partial D} F \cdot \nu \, dS$$

em que

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z < 1\},$$

ν é a respectiva normal unitária exterior e $F(x,y,z) = (x + e^{y^2+z^2}, y + e^{z^2+x^2}, z + e^{x^2+y^2})$.