

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste (Versão B)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

8 de Junho de 2015

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4) 1. Justifique que a equação $x^2 + y + z^2 + e^{xyz} = 2$ define implicitamente z como uma função $h(x, y)$ numa vizinhança de $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ e calcule $\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0)$.

(4) 2. Calcule o volume de $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \frac{1}{3} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

(4) 3. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy^2 \leq 9, 1 \leq x^2y \leq 9\}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Aplique a mudança de variável

$$\begin{cases} u = x^2y \\ v = xy^2 \end{cases}$$

para transformar o integral $\iint_A x^2y^2 f(x^3y^3) dx dy$ num integral de uma função adequada num intervalo de \mathbb{R}^2 .

(3) 4. Calcule o integral de linha $\int_L ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$ em que L é descrita por um caminho C^1 unindo a origem a um ponto (a, b) verificando $ab = 4$.

(3) 5. Sejam $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + z^2 - 1) = 0\}$ e $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 = 0, x^2 + z^2 - 1 = 0\}$.

a) Justifique que $M \setminus E$ é uma variedade bidimensional.

b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a $M \setminus E$ no ponto $(1, 1, 0)$.

(2) 6. Calcule

$$\iint_{\partial D} F \cdot \nu dS$$

em que

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\},$$

ν é a respectiva normal unitária exterior e

$$F(x, y, z) = (x + \cos(y^2 + z^2), y + \cos(z^2 + x^2), z + \cos(x^2 + y^2)).$$