

Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste (Versão B)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

12 de Junho de 2017

Justifique adequadamente todas as respostas.

- (3) 1. Considere a igualdade $\cos(x + y) + xy - x = 1 - 2\pi$. Mostre que a igualdade define y como uma função de x , $y = h(x)$, para (x, y) numa vizinhança suficientemente pequena de $(2\pi, 0)$, calcule $h'(2\pi)$ e aproveite para justificar que h é crescente numa vizinhança de 2π .

- (3) 2. Calcule a área da superfície em \mathbb{R}^3 definida por $y = x^2 + z^2 \leq 1$.

- (4) 3. Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, -2 \leq y - x^2 \leq -1, 0 \leq y + x^2 \leq \frac{1}{2}\}$. Use a mudança de coordenadas definida para $x > 0$ por

$$\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = -x^2 + y \end{cases}$$

para calcular

$$\iint_B xy \, dx \, dy.$$

- (4) 4. Calcule

$$\iiint_U z \, dx \, dy \, dz$$

em que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

- (4) 5. a) Calcule

$$\int_L \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \, dx - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy$$

em que L é o segmento de recta no plano unindo $(1, 1)$ a $(2, 2)$.

- b) Justifique que o integral da alínea anterior tem o mesmo valor qualquer que seja a linha L de classe C^1 unindo aqueles dois pontos no mesmo sentido e contida no semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

- (2) 6. Para $r > 0$ define-se

$$g(r) = \iint_{\partial B_r(0,0,0)} F \cdot \nu \, dS$$

em que $F(x, y, z) = (x^2, -2xy + e^{y^3 + 3x^2y}, z)$ e ν é a normal unitária exterior a $B_r(0, 0, 0)$. Calcule, ou mostre que não existe, $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r)$.