Cálculo Diferencial e Integral II

1º Exame

Campus da Alameda **25 de Junho de 2007, 9 horas**

Engenharia Biológica, Engenharia Biomédica,
Engenharia Física, Engenharia de Materiais, Engenharia Química,
Matemática Aplicada e Computação, Química

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I. 1. Calcule o volume do subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, |y| \leq x \leq 1\}$$

(3,5) 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere o integral iterado

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x+y)\, dz \right) dx \right) dy.$$

Use as coordenadas definidas por

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$, para obter uma expressão alternativa para o integral iterado.

II. 1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{arctg}(y/x), & \text{se } x \neq 0, \\ (x^2+y^2)\frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Estude g quanto a continuidade.

b) Estude g quanto a diferenciabilidade.

c) Mostre que a derivada dirigida $D_{(x,y)}g(x,y)$ existe para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e calcule-a.

2. Considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tem a forma $F(x, y) = \phi(x^2 - y^2)$ para uma certa função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que (x_0, y_0) é um ponto de estacionaridade de F se e só se ou $x_0^2 - y_0^2$ é um ponto de estacionaridade de ϕ ou $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

3. Considere uma aplicação $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto G(x, y) = (e^{x-y+x^4y^4}, e^{x+y+x^2y^5})$. Mostre que existe uma bola centrada em $(0, 0)$ em que esta aplicação é injectiva com inversa C^1 e, designando a inversa por θ determine $D\theta(1, 1)$.

III. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg} n}{n} x^n$.

a) Determine para que valores de x é que a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

b) Mostre que existe uma vizinhança de 0 onde aquela série define uma função crescente.

IV. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = (1 - 2x^2 - y^2)xy$. Mostre que:

a) h não possui pontos de extremo absoluto.

b) h possui só quatro pontos de extremos local, dois deles pontos de máximo e dois pontos de mínimo.

V. 1. Um caminho $r \in C^1$ definindo uma linha L tem início na origem em $\mathbb{R}^3$ e termina num ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcule o integral de linha

$$\int_L x\, dx + y\, dy + z\, dz.$$

2. Calcule a área da superfície $z = xy$ contida no cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

VI. Calcule o fluxo do campo $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \psi(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2 - 2xz - 2yz)$ através da fronteira da região $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \land z \geq 0 \land x \geq 0 \land y \geq 0\}$ no sentido da respectiva normal exterior.

Resolução

A solução desta prova está a ser eleborada em 2014/15. Está ainda incompleta e não sofreu o grau de revisão normalmente associado com a solução de uma prova de avaliação. Esteja atento à publicação de actualizações.

I. 1. Calcule o volume do subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, |y| \leq x \leq 1\}$$

O volume pode ser calculado considerando

$$\begin{aligned}
\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz &= \iint_{|y|\leq x\leq 1} \left(\int_0^{x^2+y^2} 1\,dz \right) dx\,dy \\
&= \iint_{|y|\leq x\leq 1} x^2 + y^2\,dx\,dy = 2 \iint_{0\leq y\leq x\leq 1} x^2 + y^2\,dx\,dy \\
&= 2 \int_0^1 \left(\int_y^1 x^2 + y^2\,dx \right) dy = 2 \int_0^1 \frac{1}{3} - \frac{y^3}{3} + y^2(1-y)\,dy \\
&= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(3,5) 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere o integral iterado

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x+y)\,dz \right) dx \right) dy.$$

Use as coordenadas definidas por

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$, para obter uma expressão alternativa para o integral iterado.

II. 1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{arctg}(y/x), & \text{se } x \neq 0, \\ (x^2 + y^2) \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Estude g quanto a continuidade.

No complementar do eixo dos ys não há dúvida que se trata de uma função contínua pois trata-se de um produto de um polinómio pela função $(x, y) \mapsto \operatorname{arctg}(y/x)$ que é uma composta da função arctg, que é contínua em $\mathbb{R}$, com a função $(x, y) \mapsto y/x$ que é uma função racional.
Consideramos agora os restantes casos. Seja $(0, y_0)$ tal que $y_0 > 0$. Então

$$\lim_{x \to 0^+} g(x, y_0) = y_0^2 \frac{\pi}{2} = g(0, \frac{\pi}{2})$$
$$\lim_{x \to 0^-} g(x, y_0) = -y_0^2 \frac{\pi}{2} \neq g(0, \frac{\pi}{2})$$

pelo que neste ponto a função não é contínua. De forma análoga a função não é contínua em pontos $(0, y_0)$ com $y_0 < 0$.
Finalmente para estudar a continuidade em $(0, 0)$ notamos que

$$|g(x, y) - g(0, 0)| \leq (x^2 + y^2) \frac{\pi}{2}$$

donde estabelecemos a continuidade em $(0, 0)$ pois $\lim_{(x,y) \to (0,0)} x^2 + y^2 = 0$.

b) Estude g quanto a diferenciabilidade.

A função não é diferenciável para $y \neq 0$ e $x = 0$ pois aí não é contínua.
Em $(0, 0)$ a função é diferenciável com derivada nula pois

$$\frac{|g(x, y) - g(0, 0)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq (x^2 + y^2)^{1/2} \frac{\pi}{2}$$

e o lado direito da desigualdade vai para 0 quando $(x, y) \to (0, 0)$.
Nos restantes pontos do domínio a função é um produto de um polinómio pela função $(x, y) \mapsto \operatorname{arctg}(y/x)$ que é diferenciável pelo teorema de derivação da função composta (diferenciabilidade do arctg e das funções racionais.

c) Mostre que a derivada dirigida $D_{(x,y)} g(x, y)$ existe para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e calcule-a.

Num ponto (x, y) com $x \neq 0$ a diferenciabilidade de g garante que

$$D_{(x,y)} g(x, y) = \nabla g(x, y) \cdot (x, y) = x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial x}$$

em que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \operatorname{arctg} y/x - y$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y \operatorname{arctg} y/x + x$$

Num ponto do eixo dos ys recorremos à definição de derivada dirigida

$$D_{(0,y)}g(0,y) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{g(0,y+\lambda y) - g(0,y)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{(y+\lambda y)^2 - y^2}{\lambda}\frac{\pi}{2} = \pi y^2.$$

2. Considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tem a forma $F(x,y) = \phi(x^2 - y^2)$ para uma certa função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Mostre que (x_0, y_0) é um ponto de estacionaridade de F se e só se ou $x_0^2 - y_0^2$ é um ponto de estacionaridade de ϕ ou $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
3. Considere uma aplicação $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto G(x,y) = (e^{x-y+x^4y^4}, e^{x+y+x^2y^5})$. Mostre que existe uma bola centrada em $(0,0)$ em que esta aplicação é injectiva com inversa C^1 e, designando a inversa por θ determine $D\theta(1,1)$.

III. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{arctg} n}{n} x^n$.

a) Determine para que valores de x é que a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

b) Mostre que existe uma vizinhança de 0 onde aquela série define uma função crescente.

IV. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = (1 - 2x^2 - y^2)xy$. Mostre que:

a) h não possui pontos de extremo absoluto.

b) h possui só quatro pontos de extremos local, dois deles pontos de máximo e dois pontos de mínimo.

Veja http://cdi2tp.math.tecnico.ulisboa.pt/praticas/5

V. 1. Um caminho $r \in C^1$ definindo uma linha L tem início na origem em $\mathbb{R}^3$ e termina num ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcule o integral de linha

$$\int_L x\,dx + y\,dy + z\,dz.$$

2. Calcule a área da superfície $z = xy$ contida no cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

VI. Calcule o fluxo do campo $\mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto \psi(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2 - 2xz - 2yz)$ através da fronteira da região $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \wedge z \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ no sentido da respectiva normal exterior.