TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
Época Especial

23 de Julho de 2019

Justifique adequadamente todas as respostas.

(2) 1. Considere o conjunto

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dy)dz)dx$.

(2) 2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} y, & \text{se } y < x^2, \\ y + x^2, & \text{se } y \geq x^2. \end{cases}$$

Determine:

a) os pontos em que g é contínua.

b) se g é ou não diferenciável em $(0, 0)$.

(2) 3. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x, y, z) = \cos(x + y + z) + xyz$.

a) Mostre que a equação $F(x, y, z) = 1$ define z como função de (x, y), de classe C^2, numa vizinhança do ponto $(2, -2, 0)$.

b) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(2, -2)$.

(2) 4. Seja $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2,\ x \geq 0\}$ e considere a função $h : P \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = x^2y(1 - y - x^2)$.

a) Justifique que o mínimo absoluto de h é 0 e que h tem um máximo absoluto num ponto do interior de P.

b) Calcule o valor do máximo absoluto de h.

(2) 5. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Define-se $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $G(x, y) = \phi(xy, x - y)$. Calcule, em termos de derivadas parciais de ϕ em pontos adequados:

a) $\dfrac{\partial G}{\partial x}(1, 2)$.

b) $\dfrac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(1, 2)$.

(2) 6. Considere o conjunto

$$M = \{(t,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, x + y + z = 0\}.$$

a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

b) Determine uma base do espaço tangente a M no ponto $(3,0,2,-2)$.

(2) 7. Calcule o volume da região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, y \geq \sqrt{x^2+z^2}, z \geq |x|\right\}.$$

(2) 8. Seja $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

a) Calcule o integral de linha $\int_L \boldsymbol{f} \cdot d\gamma$ em que L é o arco de circunferência centrado em $(0,0)$ unindo $(1,0)$ a $(0,1)$ através de um caminho $\gamma \in C^1$.

b) Se L_0 for uma outra linha de classe C^1 contida no semiplano $x + y > \frac{1}{2}$ e unindo $(1,0)$ a $(0,1)$, decida se o integral de linha $\int_{L_0} \boldsymbol{f} \cdot d\alpha$ é necessariamente igual ou não ao calculado na alínea anterior.

(2) 9. Considere o campo $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $H(x,y,z) = (xe^z, ye^z, x^2+y^2-2e^z)$.

a) Decida se existe um campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot} F = H$ e determine um possível F.

b) Seja C uma linha fechada de classe C^1 contida no plano $x - y = 0$. Justifique que $\oint_C F \cdot dr = 0$.

(2) 10. Seja $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\psi(x,y,z) = \left(x + e^{y^2}, y + e^{z^2}, z + e^{x^2}\right).$$

Calcule o fluxo de ψ através da fronteira do cubo $[0,1]^3$ no sentido da respectiva normal exterior.