Cálculo Diferencial e Integral II
Exame e Repetição de Testes (Versão A)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

27 de Junho de 2016

Para resolver um teste considere a secção respectiva. Para resolver o exame considere todas as perguntas. Justifique adequadamente todas as respostas.

1º Teste

(3,0) 1. Calcule o volume da região $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \operatorname{sen} x, 0 \leq z \leq y \leq 1, x \in [0, \pi]\}$.

(3,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arcsen}(x^2)}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

a) Determine o domínio D de f.

b) Determine $\operatorname{int} D$, ∂D e $\overline{D}$ e decida se D é aberto, fechado, conexo ou limitado.

c) Decida se f é ou não uma função limitada.

(4,0) 3. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Determine em que pontos é que h é contínua.

b) Decida se h é ou não diferenciável em $(0, 0)$.

(4,0) 4. Considere a função $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(x + y - 1)$.

a) Mostre que $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são pontos de estacionaridade de ψ que não são pontos de extremo local.

b) Justifique que ψ possui dois pontos de extremo local que não são pontos de extremo absoluto. **Sugestão**: analise o sinal de ψ.

(4,0) 5. Considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y) = F(x - y^2, y + x^2).$$

a) Relacione as matrizes jacobianas de F e G.

b) Exprima $\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}(0, 1)$ em termos de derivadas parciais de F num ponto adequado.

(2,0) 6. Justifique que a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{(2 - \cos(1/(x^2 + y^2)))^k}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

é integrável em $[0, 1]^2$.

2º Teste

(4,0) 7. Considere a função $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x, y, z) = e^{xy} + x^2 + yz + \cos(xz)$.

a) Mostre que a equação $\psi(x, y, z) = 3$ define x como uma função de y e z, $h(y, z)$, numa vizinhança de $(1, 0, 0)$.

b) Calcule $\frac{\partial h}{\partial z}(0, 0)$.

(4,0) 8. Calcule, usando coordenadas esféricas,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \iiint_{A_\epsilon} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/3}} \, dx \, dy \, dz$$

em que $A_\epsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \epsilon \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ com $\epsilon > 0$.

(4,0) 9. Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y \leq x^2 + 2\}$. Calcule

$$\oint_{\partial B} \left(\operatorname{sen}\left(x^4\right) - xy\right) \, dx + \left(x^2 + e^{-y^2}\right) \, dy$$

em que ∂B é "percorrida uma vez no sentido directo".

(3,0) 10. Considere o campo $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x - 2y}{x^2 + y^2}, \frac{y + 2x}{x^2 + y^2} \right).$$

a) Verifique que o campo é fechado.

b) Calcule um integral de linha de φ sobre uma circunferência centrada em $(0, 0)$ para mostrar que o campo não é conservativo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

c) Decida se o campo é ou não conservativo no semiplano definido por $y > x$.

(3,0) 11. Decida se o conjunto V definido por

$$\begin{cases} z = x^2 + 4y^2, \\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, \\ (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \end{cases}$$

é ou não uma variedade diferenciável e, na afirmativa, determine a sua dimensão e o respectivo espaço normal em $(1, 0, 1)$.

(2,0) 12. Calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$$

em que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, z \in [0, 1], x^2 + y^2 = 1\},$$

ν é a respectiva normal unitária contínua verificando $\nu(1, 0, 1/2) = (1, 0, 0)$ e

$$F(x, y, z) = (xe^{yz(1-z)}, ye^{xz(1-z)}, ze^{xy(1-z)}).$$