Cálculo Diferencial e Integral II
Repetição de Testes e Exame (Versão B)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

2 de Julho de 2018

Para resolver um teste considere a secção respectiva. Para resolver o exame considere todas as perguntas. Justifique adequadamente todas as respostas.

1º Teste

(4) 1. a) Mude a ordem de integração para calcular

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \cos(\pi y^4)\, dy \right) dx.$$

b) Determine o volume de $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le (y-1)^2, 0 \le x \le 1 - (y-1)^2, y \le 1\}$.

(3) 2. Considere a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y, z) = \begin{cases} \frac{y^3 z}{x^2+y^2+z^2}, & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Decida se g é diferenciável em $(0, 0, 0)$.

(4) 3. Seja $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = G(y - x^2, y^2 - x)$.

a) Exprima ∇F em termos de ∇G.

b) Exprima $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(1, 1)$ em termos de derivadas parciais adequadas de G.

(4) 4. Considere a função definida por $f(x, y) = xy - xy^2 + \frac{1}{x}$.

a) Decida se f possui extremos locais e, na afirmativa, localize-os.

b) Decida se a restrição de f ao conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \le 1, x \ge \frac{1}{2}, y \ge \frac{1}{2}\}$ possui ou não pontos de extremo absoluto e, na afirmativa, localize-os.

(3) 5. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} y^2 + x^4 = e^{xyz}, \\ y^2 + z^2 = 4\cos(xyz). \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema define (x, z) como uma função C^1 de y, $(x, z) = \alpha(y)$, para (x, y, z) numa vizinhança suficientemente pequena de $(0, 1, \sqrt{3})$.

b) Calcule $\alpha'(1)$.

(2) 6. Justifique que o contradomínio da função $h : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| + e^{x^2} \le 4\} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = |y + x|e^{y\sqrt{x^2+1}}$, é um intervalo $[0, c]$ com $c > 0$.

2^{o} Teste

(4) 7. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, 1 \le x \le 4\}.$$

Calcule a área de S.

(3) 8. Calcule o volume da região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - \sqrt{x^2+y^2} \ge z \ge x^2 + y^2 \ge \frac{1}{4}, x \ge y\right\}.$$

(4) 9. Seja $M = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y-x)^2 + z^2 = 5\big\}$.

a) Justifique que M é uma variedade diferenciável e determine a sua dimensão.

b) Determine $N_M(0,1,2)$ e $T_M(0,1,2)$, respectivamente o espaço normal e o espaço tangente a M no ponto $(0,1,2)$.

(3) 10. Calcule o integral de linha

$$\int_L \frac{y}{1+x^2y^2}\,dx + \frac{x}{1+x^2y^2}\,dy$$

em que L é uma linha de classe C^1 unindo a origem a um ponto da hipérbole $xy = 1$.

(3) 11. Seja $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$H(x,y,z) = (x + \cos(yz), y + \operatorname{sen}(xz), z^3 + \operatorname{arctg}(xy)).$$

Calcule

$$\iint_{\partial B_1(0,0,0)} H \cdot \nu \, dS,$$

em que ν é a normal unitária exterior a $B_1(0,0,0)$.

(3) 12. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x,y,z) = (-y, x, z^2 - 1)$ e considere a superfície

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, 0 < z < 1\big\}.$$

Calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$$

em que ν designa a normal unitária contínua a S tal que $\nu \cdot (1,0,0) > 0$ nos pontos de S com $x > 0$.