Cálculo Diferencial e Integral II

Repetição de Testes e Exame (Versão B)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

3 de Julho de 2019

Para resolver um teste considere a secção respectiva. Para resolver o exame considere todas as perguntas. Justifique adequadamente todas as respostas.

1º Teste

(4) 1. a) Seja $V = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1, (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$ e $f : V \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Escreva $\iiint_V f$ usando a ordem de integração sugerida por

$$\int_*^* \left(\int_*^* \left(\int_*^* f(x,y,z)\, dz \right) dx \right) dy.$$

b) Mude a ordem de integração para calcular

$$\int_1^2 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{y^2}{x^2} e^{y^2/x}\, dy \right) dx + \int_2^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} \frac{y^2}{x^2} e^{y^2/x}\, dy \right) dx.$$

(4) 2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} y, & \text{se } y \neq x^2, \\ x^2 + y, & \text{se } y = x^2. \end{cases}$$

Determine:

a) os pontos em que g é contínua.

b) se g é ou não diferenciável em $(0,0)$.

c) se a função é ou não integrável em $[0,1]^2$.

(4) 3. Seja $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = G(e^x - e^y, e^x + e^y)$.

a) Exprima ∇F em termos de ∇G.

b) Exprima $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,0)$ em termos de derivadas parciais adequadas de G.

(3) 4. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = xy(x - 1 + y^2)$.

a) Verifique que $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $(1,0)$ são pontos de estacionaridade de h.

b) Decida se cada um dos pontos de estacionaridade $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $(1,0)$ é ou não ponto de extremo local de h e, na afirmativa, se é ponto de máximo ou de mínimo.

(3) 5. Seja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(tx)}{t} e^{-t}\, dt$. Determine, se existir, $G'(0)$.

(2) 6. Justifique que o contradomínio da função $h : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x,y,z) = \frac{x^2+4y^2+9z^2}{\sqrt{x^4+9y^4+4z^4}}$, é um intervalo $[\alpha, \beta]$ com $0 < \alpha < \beta$. [Sugestão: $h(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = h(x,y,z)$ para todo o $\lambda > 0$ e $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.]

2º Teste

(4) 7. Considere o sistema

$$\begin{cases} z = 2y + x^2 + e^{xy} \\ w = y - x + \operatorname{sen}(xy). \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema define (x, y) como função de (z, w), numa vizinhança de $(x, y, z, w) = (0, 0, 1, 0)$.

b) Calcule $\frac{\partial y}{\partial w}(1, 0)$.

(3) 8. Considere a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 y, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Calcule o integral de superfície

$$\iint_S \frac{y}{\sqrt{1 + 4x^2y^2 + x^4}}\, dS.$$

(3) 9. Calcule o volume da região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \leq z \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

(4) 10. Seja $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, 4x^2 + y^2 - z^2 = 0\right\}$.

a) Justifique que M é uma variedade diferenciável e determine a sua dimensão.

b) Determine $N_M(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $T_M(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, respectivamente o espaço normal e o espaço tangente a M no ponto $(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

(3) 11. Considere o campo $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $H(x, y, z) = (yz^2e^{xy}, xz^2e^{xy}, 2ze^{xy})$.

a) Decida se H é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$.

b) Calcule

$$\int_L H \cdot dr$$

em que r é um caminho C^1 definindo a linha L unindo $(3, 0, 4)$ a $(3, 0, -4)$.

(3) 12. Seja $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z) = (y(1 - z), -x(1 - z), y\psi(x, y, z))$$

e considere a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2, y > 0\right\}.$$

Calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$$

em que ν designa a normal unitária contínua sobre S tal que $\nu \cdot (0, 0, 1) > 0$.