Cálculo Diferencial e Integral II
1º Teste (Versão A)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

13 de Abril de 2019

Justifique adequadamente todas as respostas.

(3,0) 1. a) Calcule o volume de $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{1-x}, y + z \leq 1, y \in [0, 1], x \geq 0\}$.

b) Justifique que se pode inverter a ordem de integração para calcular

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{t}\right) dt \right) dx$$

e obtenha o valor do integral.

(3,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y-x}}{\log\left(1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)}$$

a) Determine o domínio D de f.

b) Determine $\operatorname{int} D$, ∂D e $\overline{D}$ e decida se D é aberto, fechado, conexo ou limitado.

(4,0) 3. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^4 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Decida se h é ou não contínua em $(0, 0)$.

b) Decida se h é ou não diferenciável em $(0, 0)$.

(4,0) 4. Considere funções $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y) = F(x \cos y, x \operatorname{sen} y).$$

Calcule, em termos de derivadas parciais adequadas de F:

a) A derivada dirigida $D_{(1,-1)}G\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

(2,0) 5. Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t+1} \operatorname{sen}((t+1)x)\, dt.$$

Justifique que ψ é diferenciável e calcule $\psi'(0)$.

(4,0) 6. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = e^{x^2+y^2} - 4xy - y^4$.

a) Decida se $(0, 0)$ é um ponto de máximo local, um ponto de mínimo local, ou um ponto de sela de g.

b) Mostre que g possui um ponto de mínimo absoluto.