Cálculo Diferencial e Integral II

2º Teste 14/06/2021

LEE, LEGI, LEIC-T, LETI

1. Preencha o nome, número de aluno e curso abaixo.
2. Para garantir que todas as suas respostas são consideradas, em particular se respondeu às perguntas não sequencialmente ou se uma pergunta não está respondida em páginas consecutivas, numere as páginas do seu caderno de respostas e indique-as na linha e coluna respectivas da tabela abaixo.

Nome: ______________________________

Número: ____________________ Curso: ____________________

Pergunta	Páginas	Classificação
1.a)		
1.b)		
2.		
3.		
4.		
5.a		
5.b		
5.c		
6.		

Nota
As perguntas são classificadas de 0 a 10, sendo a cotação de cada pergunta só considerada no momento do cálculo da classificação final.

Classificação: ____________________

Número de ordem: ____________________

Rúbrica do docente: ____________________

TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
2º Teste (Versão A)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

14 de Junho de 2021

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4,0) 1. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ com derivada que nunca se anula. Considere uma função $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\psi(x,y) = (\mathrm{sen}(xy) + h(x+y), h(x-y)).$$

a) Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que ψ é injectiva em $B_\epsilon(0,0)$.

b) Sendo ϕ a inversa da restrição de ψ a $B_\epsilon(0,0)$, determine a derivada dirigida

$$D_{(1,2)}\phi(h(0), h(0))$$

em função de $h'(0)$.

(3,0) 2. Considere uma linha L de classe C^1 no interior do 1º quadrante em $\mathbb{R}^2$ unindo $(1,2)$ a $(2,1)$. Justifique que o integral de linha

$$\int_L \frac{e^{x/y}}{y}\,dx - \frac{xe^{x/y}}{y^2}\,dy$$

é independente do caminho unindo $(1,2)$ a $(2,1)$ e calcule o seu valor.

(4,0) 3. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x, 1 \le xy \le 4, x^2 - y^2 \le 1\}$. Calcule o integral

$$\int_A x^3y + xy^3\,dx\,dy$$

usando a mudança de variável definida por

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = x^2 - y^2. \end{cases}$$

(3,0) 4. Calcule o volume da região $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x^2 + y^2, 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$.

(4,0) 5. Seja $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4, z = 1 - x^2 - y^2\}$.

a) Mostre que L é uma variedade diferenciável unidimensional de classe C^∞.

b) Determine o espaço tangente e o espaço normal a L no ponto $(0, \sqrt{3}, -2)$.

c) Calcule os possíveis valores do integral de linha $\int_L (y - x^2, x - y + z, y - z^3) \cdot dr$ em que r é uma parametrização C^1 de L.

(2,0) 6. Seja U um domínio regular em $\mathbb{R}^4$ contendo $(0,0,0,0)$ no seu interior e $F : \mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\} \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$F(w,x,y,z) = \left(\frac{w}{r^4}, \frac{x}{r^4}, \frac{y}{r^4}, \frac{z}{r^4}\right) \qquad \text{em que } r = \|(w,x,y,z)\|.$$

Relacione o fluxo do campo F através de ∂U com o fluxo de F através da fronteira de uma bola $B_\epsilon(0,0,0,0)$ cujo fecho está contido no interior de U (considere sentidos das normais arbitrados por si). Determine os valores dos fluxos.