TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II

1º Teste (Versão B)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

9 de Abril de 2016

Justifique adequadamente todas as respostas.

(3,0) 1. Calcule o volume da região $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - x^2 \leq z \leq 2 - 2x^2, 0 \leq y \leq x\}$.

(4,0) 2. Considere uma função definida num subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1 - x - y}$$

a) Determine o domínio D de f.

b) Determine $\operatorname{int} D$, ∂D e $\overline{D}$ e decida se D é aberto, fechado, conexo ou limitado.

c) Decida se f é ou não uma função limitada.

d) Decida se f é ou não prolongável por continuidade a $(1, 0)$.

(3,0) 3. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{|x||y|}{|x|+|y|}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Determine em que pontos é que h é contínua.

b) Decida se h é ou não diferenciável em $(0, 0)$.

(4,0) 4. Considere funções $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ com $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x, y, z) = F(xz, xy, yz).$$

a) Supondo $\nabla F(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, calcule $\nabla G(1, 0, 1)$.

b) Exprima $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}(1, 0, 1)$ em termos de derivadas parciais de F adequadas.

(4,0) 5. Determine o contradomínio da função $\psi : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)xy^2$ em que $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

(2,0) 6. Para $k \in \mathbb{N}_1$ seja $P_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = \frac{1}{k}\}$ e considere $\phi : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(k), & \text{se } (x, y) \in P_k, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine os pontos em que ϕ é contínua e decida se ϕ é ou não integrável em $[0, 1]^2$.